

---

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ТЕОРИИ ВИБРАТОРНЫХ АНТЕНН

А.С. Ильинский (Москва)

## Введение

Разработка математических моделей вибраторных антенн представляет собой одну из важных и актуальных проблем антенной техники. Вибраторная антенна появилась в радиотехнике с момента ее возникновения, когда А.С. Попов впервые использовал радиоволны для передачи сигнала в 1895 году и начал эру радио. В настоящее время системы вибраторных излучателей широко применяются для разработки антенн КВ и УКВ диапазонов. При этом в современных условиях очень большое значение имеют вопросы взаимного влияния друг на друга активных и пассивных излучателей различного диапазона. Учет взаимного влияния проводников требует эффективных методов расчета распределения токов, учитывающих это влияние. Метод наведенных э.д.с., предложенный А.А. Пистелькорсом в 1928 году [1], дает приближенное решение, точность которого во многих случаях недостаточна, а оценка погрешности требует более детального расчета распределения токов. Строгая постановка задачи определения распределения тока приводит к системе интегральных уравнений. Для системы параллельных проводников такая система интегральных уравнений получена в работе В.И. Дмитриева и А.Н. Тихонова [2], а для системы произвольно расположенных проводников – в работе А.С. Ильинского и И.В. Бережной [3]. При получении интегральных уравнений ток на поверхности вибраторов определяется из решения краевой задачи для уравнений Максвелла.

Задача возбуждения конечного цилиндрического вибратора имеет давнюю и интересную историю. Вопрос о распределении тока вдоль вибратора впервые рассмотрели С. Poklington [4] и М. Abagam [5]. Они показали, что основному колебанию тока в вибраторе соответствует синусоидальное распределение тока вдоль провода антенны. Было установлено, что резонансная

длина волны основного колебания близка к удвоенной длине вибратора. В работе [6] М. Абрагам рассмотрел излучение вертикального заземленного провода. Он считал Землю хорошо проводящей средой и показал, что её влияние можно учесть, вводя зеркальное изображение антенны. Достаточно подробно результаты излучения антенны, как линии открытой на конце, рассмотрены в книге И.Г. Клячкина [7].

Строгая постановка задачи о распределении тока в вибраторе основана на сведениях задачи о возбуждении вибратора к интегральным уравнениям относительно функции распределения тока. Первую работу в этом направлении опубликовал Е. Hallen [8]. В этой работе для передающей антенны предполагалось, что сторонняя напряженность тока сосредоточена в зазоре, а на поверхности вибратора  $E^{\text{ст}} = 0$ ; следовательно, и касательная составляющая полного поля равна нулю. Галлен получил для распределения тока  $I(z)$  вдоль вибратора длиной  $2l$  интегральное уравнение

$$\int_{-l}^l I(z') dz' \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikr}}{2\pi r} d\psi = U \sin k|z| + A_1 \cos kz,$$

где  $r = \sqrt{|z - z'|^2 + 4a^2 \sin^2 \psi}$ ,  $k = \frac{\omega}{c}$ ,  $a$  — радиус вибратора,  $U$  — напряжение в зазоре, а  $A_1$  определяется из условия  $I(l) = 0$ . Далее он решил это уравнение методом разложения в ряд функции распределения тока по параметру  $\Omega = 2 \ln \frac{2l}{a}$ . Систематическому исследованию интегрального уравнения Галлена посвящена монография [9].

Оригинальный метод исследования интегрального уравнения был разработан М.А. Леонтовичем и М.Л. Левиным [10], однако принятые исходные положения математической модели остались теми же, что и в работе Галлена.

Математическая модель, на основе которой получено уравнение Галлена, не учитывает согласования токов в линиях, питающих антенну и токов в излучателях. В данной модели эти процессы не зависят друг от друга. Это приводит к определенным противоречиям в постановке задачи. Как показано в работе Л.А. Вайнштейна [11], возбуждение вибратора бесконечно-

малым зазором, что описывается заданием  $E^{\text{ст}} = U \delta(z)$ , приводит к сингулярному распределению тока. В точке питания распределение тока имеет слабую особенность. Это создает многие трудности как при решении уравнения, так и при применении результатов, поскольку одной из основных целей моделирования является определение условий согласования фидерных линий и излучателя.

Самосогласованная модель возбуждения вибратора рассмотрена в работе [12]. В ней рассмотрено возбуждение вибратора двухпроводной линией, при этом волны тока отражаются от излома двухпроводной линии, что позволяет строго определить входные сопротивления вибратора. В работе [13] на основе прямого решения системы интегральных уравнений относительно токов как непосредственно в вибраторе, так и в проводящей двухпроводной линии получены поправки к входному сопротивлению, учитывающие взаимную связь излучателя и фидера.

Для успешного применения модели интегрального уравнения к расчету вибраторных антенн важной была работа А.Н. Тихонова и В.И. Дмитриева [2], где был предложен общий метод решения системы интегральных уравнений описывающих распределение тока в системе параллельных линейных вибраторов. В этой работе получена система интегральных уравнений с логарифмической особенностью в ядрах при совпадении аргументов и разработан метод их эффективного решения. Эта работа стимулировала ряд работ, позволяющих создать комплекс прикладных программ расчета вибраторных антенн [3], [14].

Однако ряд важных вопросов теории возбуждения вибраторных антенн требует дальнейшего решения. Это вопросы связаны с различными способами возбуждения антенн, с учетом электрических контактов между вибраторами, с расчетом антенн в широком диапазоне частот. Это привело к разработке математических моделей вибраторных антенн на основе метода интегральных уравнений. Рассмотрим некоторые из этих вопросов.

## 1. Интегральное уравнение линейного вибратора

Рассмотрим задачу возбуждения круглого цилиндрического вибратора, представляющего собой конечный отрезок тонкостен-

ной круглой трубы радиуса  $a$  и длины  $2l$ . Толщиной трубы будем пренебрегать. Поверхность  $S$  цилиндрической оболочки будем считать идеально проводящей. Введем цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$ , в качестве начала координат выберем точку  $O$  на оси трубы, равноудаленную от ее концов так, что поверхность  $S$  задается в цилиндрических координатах как множество точек  $S : \{r = a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, |z| < l\}$ .

Будем рассматривать осесимметричное возбуждение вибратора, которое описывается распределением стороннего электрического поля  $\vec{E}^{\text{ст}}$ , не зависящего от угловой координаты  $\varphi$  и направленного вдоль оси вибратора:  $\vec{E}^{\text{ст}} = (0, 0, E^{\text{ст}})$ .

Электромагнитное поле излучения в любой точке пространства  $R^3$  вне  $\bar{S}$  имеет компоненты  $(E_z, E_r, H_\varphi)$  и может быть выражено через векторный потенциал  $\vec{A} = A(M) \vec{i}_z$ :

$$\vec{E}(M) = \frac{i}{\omega \varepsilon_0} (\text{grad div } \vec{A} + k^2 \vec{A}), \quad \vec{H}(M) = \text{rot } \vec{A}, \quad M \in R^3 \setminus \bar{S}.$$

Здесь зависимость от времени выбрана в виде  $e^{-i\omega t}$ ,  $\omega$  — круговая частота волнового процесса,  $k^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ ,  $\varepsilon_0, \mu_0$  — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды,  $z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$  — импеданс среды. Функция  $A(M)$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца всюду в  $R^3 \setminus \bar{S}$ :

$$\Delta A + k^2 A = 0. \quad (1)$$

Составляющие электромагнитного поля следующим образом выражаются через  $A$ :

$$E_z = \frac{i}{\omega \varepsilon_0} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) A(r, z), \quad E_r = \frac{i}{\omega \varepsilon_0} \frac{\partial^2 A(r, z)}{\partial z \partial r},$$

$$H_\varphi = - \frac{\partial A(r, z)}{\partial r}.$$

Электромагнитное поле излучения должно удовлетворять на поверхности  $S$  граничному условию на поверхности вибратора:

$$E_z + E_z^{\text{ст}} = 0, \quad P \in S. \quad (2)$$

Кроме того, поля должны удовлетворять условиям излучения на бесконечности и условию Мейкснера на краях бесконечно



тонкой цилиндрической поверхности  $S$ . Условия на ребре состоят в том, что в произвольной ограниченной окрестности кромки вибратора электромагнитное поле должно быть интегрируемо с квадратом. Это условие означает, что функция  $A(M)$  должна принадлежать пространству  $H_{loc}^1(R^3 \setminus \bar{S})$ , то есть

$$\int_{G \setminus \bar{S}} (|\nabla A|^2 + |A|^2) dv < \infty$$

для любой ограниченной области  $G$ .

Краевая задача для функции  $A(M)$  в неограниченной области  $R^3 \setminus \bar{S}$  с условиями излучения и условиями на кромках определена однозначно и существует. Теорема существования следует из теоремы единственности и эллиптичности краевой задачи. Теорема единственности рассмотрена в книге [15] для гладкой поверхности, однако условия на ребре позволяют доказать теорему единственности для поверхности, имеющей кромку.

Для определения токов на поверхности  $S$  весьма важно рассмотреть представление  $A(M)$  в виде поверхностного потенциала простого слоя

$$A(M) = \int_S j(P) \frac{e^{ikR_{MP}}}{4\pi R_{MP}} dS_P,$$

где  $R_{MP}$  – расстояние между точками  $M(r, 0, z) \in R^3 \setminus S$  и  $P(a, \varphi, \zeta) \in S$ . Функция  $j(P)$  однозначно определяется по функции  $A(M)$ . Однако свойства функции  $j(P)$  таковы, что они должны быть согласованы с условиями на ребре для функции  $A(M)$ . Функция  $j(P)$  должна удовлетворять интегральному уравнению, порешению которого определяется решение краевой задачи. Выбор класса, которому принадлежит распределение  $j(P)$ , и определяет свойства решений интегрального уравнения. В первых работах по теории интегрального уравнения тонкого вибратора считали, что достаточно выбрать функцию  $j(P)$  непрерывной и обращающейся в нуль на концах вибратора. Но такой класс функций является слишком широким для операторного уравнения тонкого вибратора. Это привело к тому, что задача определения решения операторного уравнения оказалась некорректно поставленной, а интегральное уравнение – интегральным

уравнением I-го рода с вполне непрерывным оператором. Это обстоятельство было установлено после появления работ А.Н. Тихонова по теории некорректно поставленных задач.

Однако интегральное уравнение для распределения тока может быть сформулировано как корректная задача с ограниченным обратным оператором. При этом возможны различные формулировки интегрального уравнения. Если правая часть уравнения достаточно гладкая, то возможна формулировка корректной задачи для весовых пространств  $\Phi_R$  [16], [17]. Однако наиболее естественный подход заключается в формулировке интегрального уравнения для пространств Соболева дробного индекса.

Пусть  $\Sigma$  — поверхность бесконечного цилиндра, содержащая поверхность  $S$ ,  $S \subset \Sigma$ . Введем пространства Соболева для функций, имеющих осевую симметрию по азимутальному углу  $\varphi$  и определенных на поверхности бесконечного цилиндра  $\Sigma$ .

Введем пространство  $H^s(\Sigma)$  как множество функций  $v \in L_2(\Sigma)$ , для которых  $(1 + |\xi|^2)^s \hat{v} \in L_2(R^1)$ , где  $\hat{v}$  — преобразование Фурье. Это пространство является гильбертовым с нормой

$$\|v\|_s^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{v}|^2 d\xi.$$

Отметим, что пространства с индексами  $s$  и  $-s$  являются антидвойственными при всех  $s \in R^1$  относительно полуторалинейной формы, являющейся продолжением по непрерывности формы

$$\langle v, w \rangle = \int_{-l}^l v(z) \bar{w}(z) dz.$$

Поскольку  $S$  является подмножеством  $\Sigma$ , положим

$$H^s(S) = \{v|_S, v \in H^s(\Sigma)\}, \quad \tilde{H}^s(S) = \{v \in H^s(\Sigma) : \text{supp } v \in \bar{S}\}.$$

Пространства  $H^s(S)$  и  $\tilde{H}^{-s}(S)$  являются антидвойственными друг другу для всех  $s \in R^1$  относительно полуторалинейной формы, являющейся продолжением по непрерывности формы

$\int_{-l}^l v(z) \bar{w}(z) dz$ . Пространство  $\tilde{H}^s(S)$  может быть получено замыканием  $C_0^\infty(S)$  по норме  $\|\cdot\|_s$ .

Введем операторы:  $\gamma_0$  – оператор следа на  $\Sigma$ ,  $\gamma_1$  – оператор следа нормальной производной на  $\Sigma$  с каждой стороны поверхности  $\Sigma$ ,

$$\gamma_0 : u \rightarrow u|_{\Sigma} : H_{loc}^1(G) \rightarrow H^{1/2}(\Sigma),$$

$$\gamma_1 : u \rightarrow \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} : H_p^1(G) \rightarrow H^{-1/2}(\Sigma),$$

где  $G = G_1$  или  $G_2$  – области внутри и вне цилиндра  $\Sigma$ , а

$$H_p^1(G) = \{u \in H^1(G) : \Delta u \in L_2(G)\}.$$

Определим также оператор  $q$  продолжения нулем с  $S$  на  $\Sigma$

$$q : \varphi \rightarrow \tilde{\varphi} : \tilde{H}^s(S) \rightarrow H^s(\Sigma), \quad \tilde{\varphi} = 0 \text{ на } \Sigma \setminus \bar{S}$$

и оператор  $p$  сужения функции с  $\Sigma$  на  $S$

$$p : \varphi \rightarrow \varphi|_S : H^s(\Sigma) \rightarrow H^s(S).$$

Будем понимать равенство (2) как равенство элементов в пространстве  $H^{-1/2}(S)$ , причем равенства должны выполняться с обеих сторон поверхности  $S$ . Хорошо известно, что решения однородного уравнения Гельмгольца из  $H_{loc}^1(R^3 \setminus \bar{S})$  будут бесконечно дифференцируемы в  $R^3 \setminus \bar{S}$ , поэтому можно сразу считать, что решение уравнения (1)  $A \in C^2(R^3 \setminus \bar{S})$  и понимать в классическом смысле.

Будем искать решение краевой задачи (1), (2) в виде потенциала простого слоя

$$A(M) = \int_S j(P) \frac{e^{ikR_{MP}}}{4\pi R_{MP}} ds_P,$$

здесь  $R_{MP}$  – расстояние между точками  $M(r, 0, z) \in R^3 \setminus \bar{S}$  и  $P(a, \varphi, \xi)$ ,  $j(z) \in \tilde{H}^{1/2}(S)$ , причем  $j(z) = \left[ \frac{\partial A}{\partial n} \right]_S$  и  $[A]_S = 0$ , где  $[A]_S = p(\gamma_0(A_{G_1}) - \gamma_0(A_{G_2}))$ ,  $\left[ \frac{\partial A}{\partial n} \right]_S = p(\gamma_1(A_{G_1}) - \gamma_1(A_{G_2}))$ . В силу свойства потенциала простого слоя все условия на функцию  $A$ , кроме условия (2), удовлетворены, а краевое условие (2)

дает операторное уравнение

$$Nj = \left( \frac{\partial^2}{\partial z_{P_0}^2} + k^2 \right) \int_S j(p) \frac{e^{ikR_{P_0P}}}{4\pi R_{P_0P}} ds_P = -\frac{\omega \varepsilon_0}{i} E^{\text{ср}}(P_0), \quad P_0 \in S; \quad (3)$$

$$N : \tilde{H}^{1/2}(S) \rightarrow H^{-1/2}(S).$$

Если  $P, P_0 \in S$ , то  $R_{PP_0} = \sqrt{|z - \xi|^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi}$  и, обозначая ядро

$$K(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{e^{ikR_{PP_0}}}{4\pi R_{PP_0}} d\varphi,$$

перепишем уравнение (3) в виде одномерного уравнения

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-l}^l j(z) K(|z - \xi|) d\xi = -\frac{2}{\pi} \frac{\omega \varepsilon_0}{i} E^{\text{ср}}(z) = -g(z), \quad |z| < l,$$

которое можно рассматривать как операторное уравнение с оператором, действующим из  $\tilde{H}^{1/2}(S)$  в  $H^{-1/2}(S)$ .

Покажем, что задача излучения тонкого вибратора эквивалентна решению интегрального уравнения (3). Пусть  $E_z, E_r, H_\varphi$  — решения задачи излучения. Тогда существует функция  $j(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (H_\varphi(a + \varepsilon, z) - H_\varphi(a - \varepsilon, z))$ , которая равна нулю в точках  $z \leq -l, z \geq l$  и  $j \in \tilde{H}^{1/2}([-l, l])$ , поскольку  $H_\varphi(r, z)$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца, при этом  $H_\varphi(r, z) = -\frac{\partial A}{\partial r}$ , и условию на ребре, где  $A$  также удовлетворяет уравнению Гельмгольца и справедлива теорема о следах [2]. Функция

$$j(z) = \gamma_1 \left( -\frac{\partial A}{\partial r} \Big|_{r=0+0} \right) - \gamma_1 \left( -\frac{\partial A}{\partial r} \Big|_{r=0-0} \right)$$

порождает потенциал

$$A(r, z) = \int_S j(\xi) \frac{e^{ikR_{MP}}}{4\pi R_{MP}} ds_P, \quad M = (r, z), \quad P = (a, \xi)$$

и, следовательно,  $j(z)$  удовлетворяет уравнению (3). Если уравнение (3) может иметь лишь единственное решение в указанном

классе функций, то всякое решение уравнения (3) определяет поле излучения, и поле излучения порождает решение уравнения (3).

Покажем, что решение уравнения (3) может иметь лишь единственное решение в соответствующем классе функций. Допустим противное. Обозначим через  $j_0(z)$  решение однородного уравнения (3). Построим потенциал простого слоя с плотностью  $j_0(z)$

$$u(r, z) = \int_S \frac{e^{ikR_{MP}}}{4\pi R_{MP}} ds_P.$$

Функция  $u(r, z)$  определяет электромагнитное поле  $E_z^0, E_r^0, H_\varphi^0$ , которое является решением однородной задачи излучения, это решение же в силу теоремы единственности [15] для задачи излучения равно нулю тождественно,  $u(r, z) \equiv 0$ ,  $(r, z) \in R^2 \setminus \bar{S}$ . Вычислим всюду для точек  $S$  скачок магнитного поля, пользуясь теоремой о скачке потенциала простого слоя [18]:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( H_\varphi^0(a + \varepsilon, z) - H_\varphi^0(a - \varepsilon, z) \right) = \\ & = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a+\varepsilon} - \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a-\varepsilon} \right) = -2\pi j_0(z). \end{aligned}$$

С другой стороны, поскольку  $H_\varphi^0(r, z) \equiv 0$ , скачок равен нулю, следовательно,  $j_0(z) \equiv 0$ ,  $z \in [-l, l]$ . Вопрос о разрешимости уравнения (3) связан с рассмотрением уравнения (3) как уравнения в гильбертовых пространствах. В работе [18] установлена теорема разрешимости уравнения (3) как уравнения в нормированном пространстве  $\tilde{H}^{1/2}([-l, l])$ , при этом оператор  $A$  является фредгольмовым оператором, действующим из  $\tilde{H}^{1/2}([-l, l])$  в  $H^{-1/2}([-l, l])$ .

В работе [15] установлена корректность уравнения (3) в весовых пространствах  $X \rightarrow Y$  при  $X = L_{2p}(-l, l)$  и  $Y = W_{2q}^1[-l, l]$ . При этом даны оценки для норм прямого и обратного операторов.

В работе D.S. Jones [19] установлена однозначная разрешимость интегрального уравнения для тонкого вибратора в классе интегрируемых функций, однако этот результат не может быть применен к решению анного интегрального уравнения, поскольку не установлена его корректность в этом классе.

## 2. Схема метода Галеркина

Для применения общей схемы метода Галеркина выделим главную сингулярную часть оператора  $A$ . Вначале заметим, что ядро интегрального оператора  $K(\xi)$  имеет логарифмическую особенность. Действительно, ядро  $K(\xi)$  имеет следующее представление:

$$K(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{e^{ikR} - 1}{R} d\varphi + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{R} d\varphi,$$

оценивая асимптотическое поведение интеграла, запишем ядро в виде

$$K(\xi) = \frac{1}{\pi a} \ln \frac{8a}{\xi} + K_1(\xi).$$

Ядро  $K_1(\xi)$  имеет устранимую особенность в нуле. Таким образом, уравнение (3) можно представить в виде  $A_0 j + B j = -g$ , где

$$A_0 j = \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-l}^l j(\xi) \left( \frac{1}{\pi a} \ln \frac{8a}{|\xi - z|} \right) d\xi,$$

$$B j = \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-l}^l j(\xi) K_1(|\xi - z|) d\xi.$$

Из явного вида ядра  $K_1(\xi)$  следует, что оператор  $B$  — вполне непрерывный оператор  $B : H^{1/2} \rightarrow H^{-1/2}$ . Оператор  $A_0$  — симметричный положительно определенный оператор, имеющий ограниченный обратный. Уравнение (3) можно переписать в виде

$$j + Tj = g', \quad j \in H_0, \quad g' = -A_0^{-1}g, \quad T = A_0^{-1}B. \quad (4)$$

Уравнение (4) и уравнение (3) эквивалентны. Рассмотрим схему вычисления приближений уравнения (3) или (4) по методу Галеркина.

Рассмотрим метод Галеркина для уравнения  $Nj = -g$ . Пусть  $\{H^h\}$  — семейство подпространств  $\tilde{H}^{1/2}(S)$  таких, что  $\|v - Q^h v\| \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$  для любого  $v \in \tilde{H}^{1/2}$ ; здесь  $Q^h$  — ортопроектор на  $H^h$  в  $\tilde{H}^{1/2}(S)$ . Метод Галеркина состоит в том, чтобы найти  $\psi^h \in H^h$ , такую, что

$$\langle N\psi^h, v \rangle = \langle -g, v \rangle, \quad v \in H^h. \quad (5)$$

Здесь скобки означают соотношения антидвойственности пространств  $H^{-1/2}(S)$  и  $\tilde{H}^{1/2}(S)$ , то есть продолжения по непрерывности на  $H^{-1/2}(S)$  и  $\tilde{H}^{1/2}(S)$  формы  $\langle g, v \rangle = \int_S g v ds$ . Если  $H^h$  – конечномерно, то схема метода Галеркина приводит к системе линейных алгебраических уравнений. Пусть  $\psi_i^h$  – базис в  $H^h$ . Тогда соотношение (5) эквивалентно

$$N^h u_h = -b_h, \quad (6)$$

где  $N^h = \{\langle N\psi_i^h, \psi_j^h \rangle\}$ ,  $b_h = \{\langle g, \psi_j^h \rangle\}$ ,  $u_h = \{u_i^h\}$ ,  $\psi^h = \sum_{i=1}^n u_i^h \psi_i^h$ . Коэффициенты  $u_i^h$  определяются из системы уравнений Галеркина для уравнения (3):

$$\sum_{i=1}^n \{\langle A_0 \psi_i^h, \psi_j^h \rangle + \langle B \psi_i^h, \psi_j^h \rangle\} u_i^h = \langle -g, \psi_j^h \rangle, \quad j = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Для сходимости метода Галеркина имеет место следующее утверждение. Существует  $h_0 > 0$  такое, что при всех  $0 < h < h_0$  уравнение (6) имеет единственное решение  $\psi^h \in H^h$ . При  $h \rightarrow 0$   $\psi^h$  сходится к точному решению  $\psi$  квазиоптимально, то есть существует постоянная  $C$  такая, что для всех  $h$ ,  $0 < h < h_0$ , имеет место оценка  $\|\psi - \psi^h\|_{1/2} \leq C \inf_{v \in H^h} \|\psi - v\|_{1/2} = C E_{1/2}(\psi; H^h)$ . Норма  $\|v\|_{1/2}$  означает  $\|v\|_{\tilde{H}^{1/2}(S)}$ .

Принимая во внимание поведение аппроксимаций точного решения на заданной системе координатных функций, можно получить оценки скорости сходимости приближенного решения к точному. Наиболее простой для реализации метод получается при использовании кусочно-линейных сплайнов. При этом все элементы матрицы системы метода Галеркина удастся выразить аналитически через значения ядра  $K(\xi)$  в точках сетки сплайнов. В этом случае приближенное решение уравнения (3)  $\psi^h$  будем искать в виде суперпозиции В-сплайнов первой степени

дефекта  $v = 1$ :

$$\psi^h(z) = \sum_{i=1}^{n-1} u_i B_i(z), \text{ где } B_i(z) = \begin{cases} \frac{z - z_{i-1}}{h_i}, & z_{i-1} \leq z \leq z_i, \\ 1 + \frac{z_i - z}{h_{i+1}}, & z_i \leq z \leq z_{i+1}, \\ 0, & z \leq z_{i-1} \text{ и } z \geq z_{i+1}, \end{cases}$$

$z_i, i = 0, \dots, n$  — точки разбиения отрезка  $[-l, l]$ ,  $z_0 = -l, z_n = l, z_i < z_{i+1}, h_i = z_i - z_{i-1}$ .

### 3. Интегральные уравнения для системы вибраторов

Рассмотренная вычислительная схема решения одного интегрального уравнения полностью переносится на систему интегральных уравнений, которая получается при рассмотрении системы вибраторных излучателей.

Для системы из произвольного числа излучателей, расположенных в однородном пространстве, задача о возбуждении токов сводится к системе слабо сингулярных интегральных уравнений относительно функций распределения токов на каждом вибраторе

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_0^{L_l} I_l(t) K_{ll}(|z_l - t|) dt + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^n \int_0^{L_l} I_l(t) K_{lm}(z_l, t) dt = \\ = 2\pi i \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} U_l \sin k|z_l - Z_l| + C_l^1 \sin k z_l + C_l^2 \cos k z_l, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $I_l(t)$  — распределение тока на  $l$ -ом вибраторе,  $k$  — волновое число, а  $\varepsilon$  и  $\mu$  — диэлектрическая и магнитная проницаемости однородного пространства,  $U_l$  — разность потенциалов, подключенная к  $l$ -ому вибратору в точке  $Z_l$ ,  $n$  — число излучателей в системе. Временная зависимость взята в виде  $\exp(-i\omega t)$ . Ядра интегрального уравнения  $K_{ll}$  и  $K_{lm}$  имеют вид

$$K_{ll}(|z_l - t|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{e^{ik\sqrt{(z_l - t)^2 + 4a_l^2 \sin^2 \psi}}}{\sqrt{(z_l - t)^2 + 4a_l^2 \sin^2 \psi}} d\psi, \quad (0 \leq z_l \leq L_l),$$



$$\begin{aligned}
 K_{lm}(z_l, t) = & r_m^l \frac{e^{ikR_m^l(z_l, t)}}{R_m^l(z_l, t)} - [(x_{0m} - x_{0l})(p_m - p_l r_m^l) + \\
 & + (y_{0m} - y_{0l})(q_m - q_l r_m^l) + (z_{0m} - z_{0l})(r_m - r_l r_m^l) + t(1 - (r_m^l)^2)] \times \\
 & \times \int_0^{L_l} \frac{\sin k|z_l - \xi|}{2k} (\xi - z_{0m}^l - t r_m^l) \left[ -k^2 - \frac{3ik}{R_m^l(\xi, t)} + \frac{3}{(R_m^l(\xi, t))^2} \right] \times \\
 & \times \frac{e^{ikR_m^l(\xi, t)}}{R_m^l(\xi, t)} d\xi, \quad (0 \leq z_l \leq L_l),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 R_m^l = & \sqrt{(x_{0m}^l + t p_m^l)^2 + (y_{0m}^l + t q_m^l)^2 + (z_l - z_{0m}^l - t r_m^l)^2} = \\
 = & \sqrt{(z_l p_l - (x_{0m} - x_{0l}) - t p_m)^2 + (z_l q_l - (y_{0m} - y_{0l}) - t q_m)^2 + \\
 & + (z_l r_l - (z_{0m} - z_{0l}) - t r_m)^2}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $a_l$  – радиус,  $L_l$  – длина,  $(x_{0l}, y_{0l}, z_{0l})$  – заданные координаты одного из концов,  $(p_l, q_l, r_l)$  – направляющие косинусы  $l$ -го вибратора.  $X_m^l = (x_{0m}^l, y_{0m}^l, z_{0m}^l)^T$  и  $P_m^l = (p_m^l, q_m^l, r_m^l)^T$  – определяется по формулам  $X_m^l = (X_m - X_l) P_m$ ,  $P_m^l = B_l P_m$ , где  $X_m = (x_{0m}, y_{0m}, z_{0m})^T$  и  $P_m = (p_m, q_m, r_m)^T$ , а матрица  $B_l$  удовлетворяет условию  $|B_l| = 1$  и

$$\sum_{j=1}^3 b_{ij}^l b_{kj}^l = \sum_{j=1}^3 b_{ji}^l b_{jk}^l = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, 3),$$

причем  $b_{13}^l = p_l$ ,  $b_{23}^l = q_l$ ,  $b_{33}^l = r_l$ .

Система интегральных уравнений (8) является слабо сингулярной системой интегральных уравнений с неоднородными коэффициентами  $C_l^1$  и  $C_l^2$ , которые определяются из условия принадлежности распределения тока  $I_l(t)$  пространству функций  $\tilde{H}^{1/2}([0, L_l])$ .

Корректная постановка задачи решения полученной системы уравнений рассмотрена в монографии Б.Г. Габдулхаева ([16], §20). Для численного решения системы удобно использовать метод аппроксимации неизвестных функций В-сплайнами, а систему линейных уравнений получать методом коллокации в узлах

В-сплайна. Подобная вычислительная схема использована для расчета логопериодической антенны в работе [20].

Существенное развитие данная методика получила в работах [21], [22], где исследована самостоятельная задача о возбуждении системы вибраторов линией питания, причем получены коэффициенты отражения в линии питания от неоднородности, которой является активный вибратор.

Задача об излучении вибраторов с учетом влияния проводящей земли является одной из ключевых задач теории антенн. Однако в большинстве работ [23] исследуется влияние земли на характеристики излучения поля в дальней зоне. Влияние земли на согласование вибраторов с линией питания обычно не рассматривалось. Однако создание мобильных систем связи показало, что земля может влиять на уровень излучаемой мощности антенной. Это обстоятельство требует дальнейшего развития математических моделей в теории вибраторных антенн.

#### 4. Влияние проводящей земли

Рассмотрим вибратор, представляющий собой идеально проводящий тонкостенный цилиндр, расположенный над плоской однородной землей с параметрами  $\varepsilon_1, \mu_0, \sigma_1$ . Вибратор питается идеальным источником напряжения  $E_{ст} = U_0 \delta(N - N_p)$ , где  $U_0$  – разность потенциалов в точке питания  $N_p$ ,  $N$  – произвольная точка пространства;  $L, a_0$  – длина и радиус вибратора.

Электромагнитное поле  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяет уравнениям Максвелла (временная зависимость вида  $\exp(i\omega t)$ )

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega \tilde{\varepsilon} \mathbf{E} - \mathbf{j}_{ст}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mu \mathbf{H},$$

где

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_m - i\sigma_m/\omega, \quad \mu = \mu_0,$$

$$\varepsilon_m = \begin{cases} \varepsilon_0, & z > 0, \\ \varepsilon_1, & z < 0, \end{cases} \quad \sigma_m = \begin{cases} \sigma_0, & z > 0, \\ \sigma_1, & z < 0. \end{cases}$$

На поверхности земли  $z = 0$  касательные составляющие  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  непрерывны, а на бесконечности  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют условиям излучения.

На поверхности вибратора должно выполняться граничное условие равенства нулю тангенциальной составляющей полного

электрического поля

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}^{\text{полн}}(N)] = 0, \quad N \in S,$$

где  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к поверхности вибратора.

Введя векторный потенциал Герца  $\mathbf{A}$ , можно представить поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в виде

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{i}{\omega \varepsilon} \left\{ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + k^2 \mathbf{A} \right\}.$$

Перейдем к решению неоднородного дифференциального уравнения относительно  $\mathbf{A}$  вида

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu_0 j_{\text{ст}}, \quad (9)$$

где  $k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon$ . Решение этого уравнения с учетом граничных условий на поверхности раздела ( $z = 0$ ) может быть выражено формулой

$$\mathbf{A}(Q) = \frac{\mu_0 a_0}{4\pi} \int_S j(N) \hat{\mathbf{G}}(Q, N) \mathbf{l} \, ds, \quad (10)$$

где  $j(N)$  – неизвестное распределение плотности тока по вибратору,  $\mathbf{l} = (p_x, q_y, r_z)$  – единичный вектор, направленный вдоль оси вибратора ( $p_x, q_y, r_z$  – направляющие косинусы), тензорная функция Грина точечного источника  $\hat{\mathbf{G}}(Q, N)$

$$\hat{\mathbf{G}}(Q, N) = \begin{bmatrix} G_1(Q, n) & 0 & 0 \\ 0 & G_1(Q, N) & 0 \\ \frac{\partial g(Q, N)}{\partial x} & \frac{\partial g(Q, N)}{\partial y} & G_{11}(Q, N) \end{bmatrix},$$

где для  $z > 0$ :

$$G_1(Q, N) = \frac{e^{-ik_0 R}}{R} + \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) \frac{e^{-\eta_0(z+z')}}{\eta_0} \frac{\eta_0 - \eta_1}{\eta_0 + \eta_1} \lambda \, d\lambda,$$

$$G_{11}(Q, N) = \frac{e^{-ik_0 R}}{R} + \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) \frac{e^{-\eta_0(z+z')}}{\eta_0} \frac{\eta_0 \varepsilon - \eta_1}{\eta_0 \varepsilon + \eta_1} \lambda \, d\lambda,$$

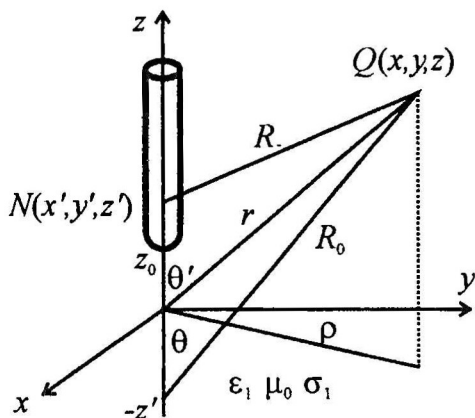


Рис. 1

$$g(Q, N) = 2 \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) \frac{e^{-\eta_0(z+z')}}{\eta_0 + \eta_1} \frac{\varepsilon - 1}{\eta_0 \varepsilon + \eta_1} \lambda d\lambda,$$

$$R = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}, \quad \rho = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2},$$

$$\eta_0 = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}, \quad \eta_1 = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}, \quad \varepsilon = (\varepsilon_1 - i\sigma_1/\omega)/\varepsilon_0,$$

$$k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0, \quad k_1^2 = \omega^2 \mu_0 (\varepsilon_1 - i\sigma_1/\omega).$$

Используя выражение (9) для векторного потенциала Герца, можно записать уравнение Галлена относительно неизвестного распределения тока  $I(N) = 2\pi a_0 j(N)$ .

Для вертикального вибратора (рис. 1)  $\mathbf{l} = (0, 0, 1)$  и уравнение Галлена имеет вид

$$\int_{z_0}^{z_0+L} I(t) [K_1(t, z') + K_2(t, z')] dt = F(z'), \quad z' \in [z_0, z_0 + L], \quad (11)$$

где

$$K_1(t, z') = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{e^{-ik_0 R}}{R} - \frac{e^{-ik_0 R_0}}{R_0} \right] d\varphi,$$

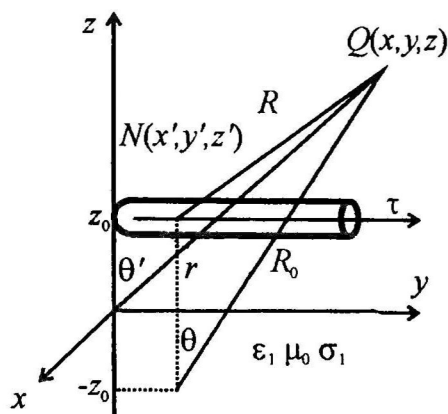


Рис. 2

$$K_2(t, z') = \int_0^{\infty} J_0^2(a_0 \lambda / 2) \frac{2\varepsilon}{\eta_0 \varepsilon + \eta_1} e^{-\eta_0(t+z')} \lambda d\lambda,$$

$$R = \sqrt{(t - z')^2 + 4a_0^2 \sin^2 \varphi}, \quad R_0 = \sqrt{(t + z')^2 + 4a_0^2 \sin^2 \varphi},$$

$$F(z') = -4\pi i \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} U_0 \sin k_0(z' - z_p) h(z' - z_p) + C_1 \sin k_0 z' + \cos k_0 z'.$$

В случае горизонтального вибратора (рис. 2) уравнение Галлена примет вид

$$\int_0^L I(t) [K_1(t, z') + K_3(t, z') + K_4(t, z')] dt = F(z'), \quad z' \in [0, L], \quad (12)$$

где  $K_1(t, z')$  имеет тот же вид, что и в случае вертикального вибратора,

$$K_3(t, z') = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} J_0(\lambda \rho) \frac{e^{-\eta_0(2z_0 + a_0(1 - \cos \varphi))}}{\eta_0 + \eta_1} \lambda d\lambda d\varphi,$$

$$K_4(t, z') = -\frac{4}{\pi} \int_0^{z'} \int_0^{\infty} J_1(\lambda \rho) A_1(\lambda) (t - \xi) \cos k_0(z' - \xi) \frac{\lambda^2}{\rho} e^{-2\eta_0 z_0} d\lambda d\xi,$$

$$A_1(\lambda) = \frac{1}{\eta_0 + \eta_1} \frac{\varepsilon - 1}{\eta_0 \varepsilon + \eta_1}.$$

Уравнения (11) и (12) являются интегральными уравнениями Фредгольма I рода. Для обеспечения устойчивости решения этих уравнений используется метод саморегуляризации (выделяется особенность в первых слагаемых ядра  $K_1(t, z')$ ).

Для решения уравнений (11) и (12) используем метод коллокаций. Представим неизвестную функцию распределения тока комбинацией  $M$  базисных кусочно-постоянных функций и найдем значения коэффициентов разложения, при которых данное представление тока является решением интегрального уравнения в  $M$  дискретных точках. Для нахождения коэффициентов разложения тока необходимо решить следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{n=1}^M (a_{nm}^1 + a_{nm}^2) I_n = F_m, \quad m = 1, \dots, M.$$

Коэффициенты  $a_{nm}^1$  для вертикального и горизонтального вибраторов вычисляются так же, как и для случая расположения вибраторов в свободном пространстве. Коэффициенты  $a_{nm}^2$  содержат несобственные интегралы с осциллирующей подынтегральной функцией. Так как параметры  $a_0$  в случае вертикального вибратора и  $\rho$  в случае горизонтального вибратора достаточно малы, функции Бесселя имеют большой период осцилляции, а подынтегральное выражение быстро убывает за счет экспоненциального множителя, то вычисление интегралов можно проводить по вещественной оси на отрезках между нулями подынтегральной функции, например по формулам Гаусса.

При нахождении поля, излучаемого вибратором в дальней зоне ( $k_0 R \gg 1$ ), можно воспользоваться асимптотическим методом приближенного вычисления интегралов Зоммерфельда, называемым методом седловой точки. Запишем выражение (10) для элементарного вертикального диполя, заменив функцию

Бесселя в интеграле Зоммерфельда на функцию Ханкеля

$$A_z^d(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S G_{11}(Q, N(t)) j(t) dt,$$

где

$$G_{11}(Q, N(t)) = \frac{e^{-ik_0 R}}{R} + I,$$

$k_0 R > 1$

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(2)}(\lambda \rho) \Gamma_v(\lambda) \frac{e^{-\eta_0(z+t)}}{\eta_0} \lambda d\lambda,$$

$$R + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-t)^2}, \quad t \in [z_0, z_0 + L],$$

$H_0^{(2)}(\lambda \rho)$  – функция Ханкеля,  $\Gamma_v(\lambda) = (\varepsilon \eta_0 - \eta_1)/(\varepsilon \eta_0 + \eta_1)$ .

В результате исследования асимптотического выражения для интеграла  $I$  можно получить следующее представление

$$G_{11}(Q, N(t)) = \frac{e^{-ik_0 R}}{R} - \frac{e^{-ik_0 R_0}}{R_0} \Gamma_v(\theta) -$$

$$- \frac{e^{-ik_0 R_0}}{k_0 R_0^2} \Gamma_{v2}(\theta) + i \frac{\varepsilon \sqrt{\varepsilon}}{1 - \varepsilon^2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}} A_2,$$

где

$$\Gamma_v(\theta) = \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} - \varepsilon \cos \theta}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} + \varepsilon \cos \theta},$$

$$\Gamma_{v2}(\theta) = \frac{1}{2 \sin^2 \theta} \Gamma_v(\theta) - \operatorname{ctg} \theta \Gamma'_v(\theta) + \Gamma''_v(\theta),$$

$$\Gamma'_v(\theta) = \frac{2\varepsilon(\varepsilon - 1) \sin \theta}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} (\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} + \varepsilon \cos \theta)^2},$$

$$\Gamma''_v(\theta) = 2\varepsilon(\varepsilon - 1) \left[ \frac{\cos \theta (\varepsilon - \sin^2 \theta + \sin \theta)}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} (\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} + \varepsilon \cos \theta)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2 \sin \theta (\cos \theta + \varepsilon \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} \sin \theta)}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} (\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} + \varepsilon \cos \theta)^3} \right],$$

$$A_2 = 2h(\theta - \theta_p) \sqrt{\frac{2\pi i k_0}{R_0 \sin \theta}} \exp\{-ik_0[\sqrt{\varepsilon} R_0 \sin \theta - (z+t)]\sqrt{1/(1+\varepsilon)}\},$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-t)^2}, \quad R_0 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+t)^2}, \quad t \in [z_0, z_0+L],$$

$$\theta_p = \operatorname{Re}(\psi_p) - \arccos[\operatorname{ch}(\operatorname{Im}(\psi_p))].$$

Для горизонтального вибратора вектор Герца имеет две составляющие

$$A_y^d(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S G_1(Q, N(t)) j(t) dt,$$

$$A_z^d(Q) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\partial g(Q, N(t))}{\partial y} j(t) dt.$$

Проводя преобразования, аналогичные преобразованиям для случая вертикального вибратора, можно получить

$$G_1(Q, N(t))_{k_0 R \gg 1} = \frac{e^{-ik_0 R}}{R} + \frac{e^{-ik_0 R_0}}{R_0} \Gamma_h(\theta) - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{-ik_0 R_0}}{k_0 R_0^2} \Gamma_{h2}(\theta),$$

$$R = \sqrt{\rho^2 + (z - z_0)^2}, \quad R_0 = \sqrt{\rho^2 + (z + z_0)^2},$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + (t - y)^2}, \quad t \in [0, L],$$

$$\Gamma_h(\theta) = \frac{\cos \theta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}},$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{h2}(\theta) = & \frac{1}{2 \sin^2 \theta} \Gamma_h(\theta) - \\ & - \operatorname{ctg} \theta \frac{\varepsilon(\sin \theta - 1)}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}(\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} + \varepsilon \cos \theta)} + \\ & + \frac{\varepsilon^2 \cos \theta + \sin \theta \cos \theta}{(\varepsilon - \sin^2 \theta)^{3/2}(\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} + \varepsilon \cos \theta)^2} - \\ & - \frac{\varepsilon \sin(1 - \cos \theta)(\sin \theta - 1)}{(\varepsilon - \sin^2 \theta)(\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta} + \varepsilon \cos \theta)}, \end{aligned}$$

$$\partial g(Q, N(t))/\partial y = 2|y - t| \frac{e^{-ik_0 R_0}}{R_0^2} \Gamma_{h1}(\theta) -$$



$$-\sqrt{\frac{2ik_0}{\pi}} \frac{|y-t|}{\rho^{3/2}} \Gamma_{h3} \exp\{-ik_0[\sqrt{\varepsilon}\rho - (z+z_0)]\sqrt{1/(1+\varepsilon)}\},$$

где

$$\Gamma_{h1}(\theta) = \frac{(\varepsilon - 1) \cos \theta}{\varepsilon(\cos \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta})^2},$$

$$\Gamma_{h3} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2 \sqrt{1+\varepsilon}}.$$

Воспользовавшись представлением напряженностей электромагнитного поля через векторный потенциал Герца, проинтегрировав вдоль вибратора, можно получить выражения для диаграмм направленностей.

Предложенный метод расчета характеристик линейного вибратора, расположенного над полупроводящей землей, позволяет осуществлять численные исследования, связанные с разработкой конкретных антенных устройств с учетом влияния земли.

На основе изложенного алгоритма построены прикладные программы, позволяющие провести исследования влияния земли на распределение тока и входное сопротивление антенны [24,25].

Работа выполнена при поддержке межвузовской научной программы "Университеты России - фундаментальные исследования" (проект 990894).

## Литература

- [1] Пистелькорс А.А. *Расчет сопротивления излучения направленных коротковолновых антенн* // ТиТБП, 1928. - №48.
- [2] Тихонов А.Н., Дмитриев В.И. Метод расчета распределения токов в системе линейных вибраторов и диаграммы направленности этой системы // В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 10. - М.: Изд-во МГУ. 1968. - С.3-8.
- [3] Ильинский А.С., Бережная И.В. *Исследование распределения тока в системе произвольно расположенных вибраторов* // В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 20. - М.: Изд-во МГУ. - 1973. - С.263-270.
- [4] Pocklington H.C. - Proc. Cambridge Philosophical Society. 1897. - №9. - С.324.

- [5] Abraham M. – *Annalen der Physik* (Wied. Ann.). 1988. – №66. – С.435.
- [6] Abraham M. – *Phisikalische Zeitschrift*. 1901. – №2. – С.329.
- [7] Кляцкин И.Г. *Основы теории линейных антенн*. – Л.: ЛЭТИ им. проф. М.А. Бонч-Бруевича, 1966.
- [8] Hallen E. *Theoretical investigation into transmitting and receiving antenna* // *Nova Acta Regide Soc. Sci. Upsaliensis*, Ser.4. – 1938. – 11. – P.1.
- [9] King R.W.P. *The Theory of Linear Antennas*. – Harvard Univ. Press, Cambridge, Massachusetts, 1956.
- [10] Леонтович М.А., Левин М.Л. *К теории возбуждения колебаний в вибраторах антенн* // *ЖТФ*. – 1944. – Т.14, №9. – С.481–506.
- [11] Вайнштейн Л.А. *Симметричные электрические колебания идеально проводящего полого цилиндра конечной длины. Ч. II, III* // *ЖТФ*. – 1967. – Т.37, №7. – С.1181–1195.
- [12] Шамеева Н.А. *Электродинамический расчет симметричного вибратора, возбуждаемого в разрез двухпроводной линией* // *Докл. АН СССР*. – 1971. – Т.201, №2. – С.328–330.
- [13] Ильинский А.С., Селин В.И. *Влияние фидера на электрические характеристики вибраторных антенн* // *Радиотехника*. – 1981. – Т. 36, №4. – С.62–66.
- [14] Бережная И.В. *Комплекс программ решения задачи излучения многоэлементной вибраторной антенны с учетом влияния линии возбуждения* // *Математическое и программное обеспечение библиотеки прикладных программ по электродинамике*. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – С.44–49.
- [15] Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Н. *Математические модели электродинамики*. – М.: Высшая школа, 1991.
- [16] Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений*. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995.

- [17] Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. *Исследование математических моделей микрополосковых линий* // Методы математического моделирования, автоматизированной обработки наблюдений и их применение. – М.: Изд-во МГУ, 1986. – С.176–198.
- [18] Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. *Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах*. – М.: ИПРЖР, 1996.
- [19] Jones D.S. *Note on the integral equation for a straight wire antenna* // IEEE Proc. – Vol. 128, Pt. 2, April 1981. – P.114–116.
- [20] Ильинский А.С., Бережная И.В., Коган Б.Л. *Расчет логопериодического облучателя зеркальной антенны* // В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 36. – М.: Изд-во МГУ, 1982. – С.84–90.
- [21] Ильинский А.С., Бережная И.В. *Математические модели тонких вибраторных антенн* // Математические модели и вычислительные методы. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – С.101–126.
- [22] Ильинский А.С., Бережная И.В. *Исследование влияния линии возбуждения на характеристики многоэлементных вибраторных антенн* // Числительные методы электродинамики. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – С.65–71.
- [23] King R.W.P., Smith G. *Antennas in Matter. Fundamentals, Theory and Applications*. – The MIT Press., London, England, 1981.
- [24] Альховский Э.А., Бережная И.В., Кондратьев А.Г. *Учет влияния проводящей земли на распределение тока и диаграммы направленности линейного излучателя* // Методы математического моделирования и вычислительной диагностики. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – С.199–208.
- [25] Ilinski A.S. Berezhnaya I.V. Alkhovski E.A. Kondratjev A.G., Perfilov O.Ju. *Investigations of HF and VHF ground antennas for communication systems* // Electromagnetics. – 1999. – V.19, №2. – P.171–185.